Exercices -Séries

A. Ramadane

Exercice 2.1

Répondre par vrai ou faux. Justifier vos choix ou donner un contre-exemple.

a) Si $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k = 1$, alors $\displaystyle\lim_{k\to\infty} u_k = 0$.

b) Si $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k = 0$, alors $\displaystyle\lim_{k\to\infty} u_k = 1$.

c) Il est possible que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ diverge mais que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u_k$ converge.

d) Si $\{u_k\}$ est positive, décroissante et converge vers 0, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (e^{u_k} - 1)$ converge.

e) Si $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \left|\frac{u_k}{u_{k+1}}\right| = 1.5$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ diverge.

Réponse

a) **VRAI**, car d'après le test de divergence si $\lim_{k\to\infty} u_k \neq 0$ alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ diverge.

b) **FAUX**, car d'après le test de divergence si $\lim_{k\to\infty} u_k \neq 0$ alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ diverge.

c) **VRAI**, car $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge et $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ converge.

d) **VRAI**, car si u_k est positive alors $e^{u_k} - 1$ l'est aussi. Si u_k est décroissante, $e^{u_k} - 1$ l'est également car la fonction exponentielle est croissante. Si u_k a pour limite 0, $e^{u_k} - 1$ a pour limite 0. Donc $e^{u_k} - 1$ est positive, décroissante et a pour limite 0 et d'après le test sur les séries alternées, la série $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(e^{u_k} - 1)$ est convergente.

e) **FAUX** car si $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{u_k}{u_{k+1}}\right| = 1.5 \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \frac{2}{3} < 1$. D'après le test de d'Alembert (ou test du quotient), la série $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge.

Exercice 2.2

a) Examiner si la série est convergente ou divergente. Si elle est convergente, calculer sa somme.

$$\text{i) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{2k}}$$

$$\text{ii) } \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

b) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^k}$ converge. Calculer sa somme pour ces valeurs de x.

a) Examinons la nature des séries.

i) La série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^2}\right)^k$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{e^2}$ comprise entre -1 et 1. Donc la série converge vers $\frac{\left(\frac{1}{e^2}\right)^1}{1-\left(\frac{1}{e^2}\right)} = \frac{1}{e^2-1}$

ii) La série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (\ln(k+1) - \ln k)$$

est une série télescopique c'est-à-dire de la forme $\sum_{k=1}^{\infty}(a_{k+1} - a_k)$ où $a_k = \ln k$.

La somme partielle d'ordre n est :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1).$$

Or la limite de la somme partielle d'ordre n est $+\infty$. Étant donné que la nature d'une série est identique à celle de sa somme partielle, on conclut que la série diverge vers $+\infty$.

b) La série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^k$$

est une série géométrique de raison $\frac{1}{x}$. Cette série converge vers $\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x-1}$ pour les valeurs de x telles que

$$\left|\frac{1}{x}\right| \leq 1 \Longrightarrow |x| \geq 1 \Longrightarrow x \in]-\infty, -1[\bigcup]1, +\infty[.$$

En conclusion, la série converge vers $\frac{1}{x-1}$ pour les valeurs de $x \in]-\infty, -1[\bigcup]1, +\infty[$ et diverge sinon.

Exercice 2.3

Si la $n^{\text{ième}}$ somme partielle d'une série $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ est

$$S_n = \frac{n-1}{n+1} \qquad n \geq 2$$

déterminer a_k et $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} a_k$.

Réponse

La somme partielle d'ordre n est donnée et dépend seulement de n. Pour déterminer le terme général de la suite qui définit la série, on sait que :

$$a_k = S_k - S_{k-1} = \frac{k-1}{k+1} - \frac{k-2}{k} = \frac{2}{k(k+1)}$$

La série a même nature que sa somme partielle. Or la somme partielle S_n converge vers 1, d'où la série a pour somme 1 $\left(\sum_{k=2}^{\infty} a_k = 1 \right)$.

Exercice 2.4

Soit la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

a) Calculer s_{10} la somme partielle d'ordre 10 de la série. Peut-on estimer la somme de cette série par s_{10} ? Justifier votre réponse.

b) Borner la somme de la série à partir du résultat obtenu en a).

c) Déterminer les valeurs de n qui garantissent que l'erreur de l'approximation de $s \approx s_n$ est inférieure à 0.001.

Réponse

a)

$$s_{10} = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{10^2} = 1.55$$

La série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann avec $p = 2 > 1$, donc elle converge. On peut donc l'approximer par sa somme partielle d'ordre 10 et en déduire l'erreur commise.

b) On sait que les séries de Riemann sont prouvées convergentes à partir du test de l'intégrale. Donc on peut borner l'erreur commise par l'approximation de la série par sa somme partielle d'ordre 10 comme suit :

$$\begin{aligned}
\int_{11}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \leq R_{10} \leq \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} &\Longrightarrow \left[-\frac{1}{x}\right]_{11}^{+\infty} \leq R_{10} \leq \left[-\frac{1}{x}\right]_{10}^{+\infty} \\
&\Longrightarrow \frac{1}{11} \leq R_{10} \leq \frac{1}{10} \\
&\Longrightarrow \frac{1}{11} + s_{10} \leq R_{10} + s_{10} \leq \frac{1}{10} + s_{10} \\
&\Longrightarrow 1.641 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1.65
\end{aligned}$$

c) Si on approxime la série par sa somme partielle d'ordre n, on commet une erreur R_n bornée comme suit :

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \leq R_n \leq \int_{n}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \Longrightarrow \left[-\frac{1}{x}\right]_{n+1}^{+\infty} \leq R_n \leq \left[-\frac{1}{x}\right]_{n}^{+\infty} \Longrightarrow \frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}$$

Pour avoir une erreur inférieure à 0.001, on peut imposer que $R_n \leq 0.001$. Ainsi on a :

$$R_n \leq 0.001 \Longrightarrow R_n \leq \frac{1}{n} \leq 0.001 \Longrightarrow n \geq 1000$$

Il faut au moins les mille premiers termes de la série pour s'assurer une erreur inférieure ou égale à 0.001.